Wie weit ist der Mond entfernt?

Parallaxenmessung bei der Mondfinsternis vom 3./4. März 2007

Bei flüchtiger Betrachtung scheint sich alles Geschehen am Sternhimmel an der Innenseite einer Kugel abzuspielen, die sich wie eine Käseglocke über uns von Horizont zu Horizont wölbt. Dabei haben wir zunächst keinerlei Gefühl dafür, wie weit die Himmelskörper von der Erde entfernt sind. Die Vermessung des Universums ist ein seit Jahrtausenden laufendes Projekt der Menschheit, das nichts an Aktualität verloren hat.

Die Mondbahn und die Entfernung des Mondes sind heute mit großer Genauigkeit bekannt. Über die Laufzeit, die ein Lasersignal von der Erde zum Mond und zurück braucht, kann die Mondentfernung auf wenige Zentimeter genau bestimmt werden (*Lunar Laser Ranging*, LLR). Wozu dann dieser Artikel? Wir wollen hier nicht in Konkurrenz zu LLR treten, sondern leicht verständlich und an einem konkreten Beispiel zeigen, wie man mit relativ einfachen Mitteln die Mondentfernung ableiten kann.

Das Prinzip der hier verwendeten Parallaxenmessung ist simpel und altbekannt: Ein Gegenstand in der Nähe erscheint in verschiedenen Richtungen vor dem weiter entfernten Hintergrund zu stehen, wenn man ihn von verschiedenen Beobachtungspunkten aus anvisiert (Gegenstand und Bebachtungspunkte dürfen dabei aber nicht auf einer Linie liegen). Für den Mond heißt das: Der relativ nahe Mond erscheint vor dem in diesem Fall als unendlich weit entfernt anzunehmenden Sternenhintergrund um einen Parallaxenwinkel π verschoben, wenn man ihn von verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aus anpeilt.

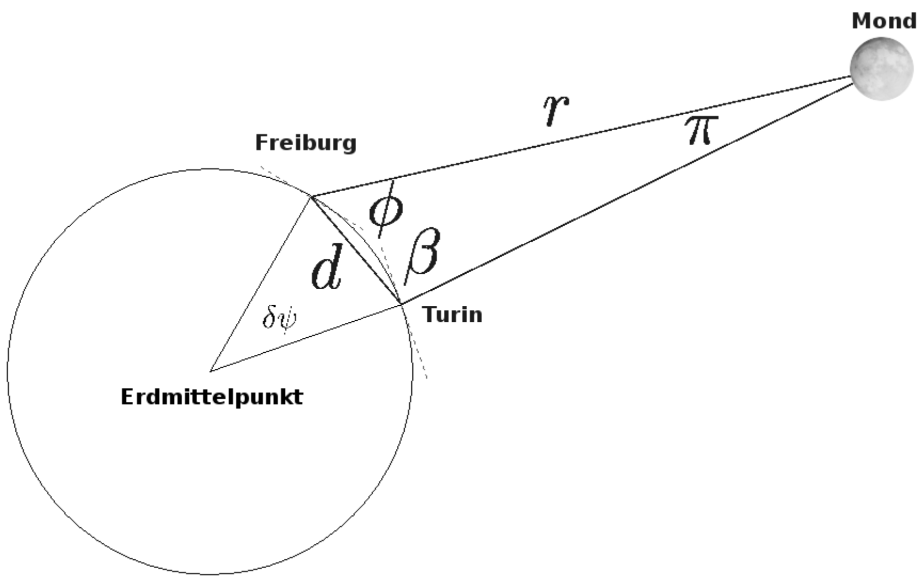

Abbildung 1: Prinzip der Bestimmung der Mondentfernung r aus der von zwei verschiedenen Beobachtungsorten auf der Erde gemessenen Winkelverschiebung π des Mondes. Um r berechnen zu können, muss noch die Entfernung d der Beobachtungsorte und ein weiterer Winkel im Dreieck bekannt sein.

In der Praxis ergibt sich bei der Messung der Mondparallaxe die Schwierigkeit, dass der Mond die meisten Hintergrundsterne bei weitem überstrahlt. Um Mond und Hintergrund gleichzeitig vermessen zu können, muss man also einen Zeitpunkt abwarten, bei dem der Mond entweder in der Nähe heller Sterne steht (z. B. bei den Plejaden) oder zu dem die Mondhelligkeit bei einer totalen Mondfinsternis stark reduziert ist.

Nach verschiedenen nicht völlig befriedigenden oder durch das Wetter vereitelten Beobachtungsversuchen bei Plejadenpassagen des Mondes im Herbst und Winter 2006/7 sollte bei der totalen Mondfinsternis vom 3./4. März 2007 ein neuer Anlauf unternommen werden. Bei guten Wetterbedingungen konnte ich von Freiburg aus zu bestimmten Zeiten einige Aufnahmen des verfinsterten Mondes zusammen mit den Hintergrundsternen 56 und 59 Leonis gewinnen. Leider war das Wetter am zweiten vorgesehenen Beobachtungsort Mainz schlecht und es konnten dort keine Bilder gemacht werden. Was nun?

Einige Tage nach der Finsternis entdeckte ich auf der Internetseite der Zeitschrift *Sky and Telescope* ein Bild von Simone Bolzoni, das dieser in Avigliano in der Nähe von Turin aufgenommen hatte. Es stellte sich heraus, dass drei unserer Bildpaare *genau* gleichzeitig aufgenommen waren und sich für die Parallaxenmessung eigneten. Simone Bolzoni stellte mir seine Aufnahmen freundlicherweise zur Verfügung, sodass die Auswertung beginnen konnte. Die folgenden Ausführungen beziehen sich nur auf das am 3. März um 23:50:00 Uhr UTC gewonnene Bildpaar. Der Mond stand zu diesem Zeitpunkt fast genau in der durch den Erdmittelpunkt und die Beobachtungsorte definierten Ebene, was die zur Auswertung benötigte Mathematik vereinfacht (siehe Abb. 1).

Zunächst ist der Abstand der beiden Beobachtungspunkte zu bestimmen (nicht entlang der Eroberfläche, sondern der kürzeste Abstand durch den Erdkörper). Aus den geografischen Koordinaten von Freiburg $\lambda_{\text{Freiburg}} = 7°48'17''$ Ost, $\psi_{\text{Freiburg}} = 48°03'07''$ Nord, $h_{\text{Freiburg}} = 219$ m NN und Avigliana bei Turin $\lambda_{\text{Turin}} = 7°23'$ Ost, $\psi_{\text{Turin}} = 45°03'$ Nord, $h_{\text{Turin}} = \text{ca. } 400$ m NN berechnet man für beide Orte genäherte geozentrisch-rechtwinklige Koordinaten mit (Erdradius $r_{\text{Erde}} = 6378$ km):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_{\text{Erde}} + h)\cos\lambda\sin\psi \\ (r_{\text{Erde}} + h)\sin\lambda\sin\psi \\ (r_{\text{Erde}} + h)\cos\psi \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Den gesuchten Abstand erhält man dann mit dem Satz von Pythagoras:

$$d = \sqrt{(x_{\text{Turin}} - x_{\text{Freiburg}})^2 + (y_{\text{Turin}} - y_{\text{Freiburg}})^2 + (z_{\text{Turin}} - z_{\text{Freiburg}})^2}. \quad (2)$$

Eine genauere Rechnung mit dem Programm INVERSE3D [1], bei der der Erdkörper nicht als Kugel, sondern als Ellipsoid angenommen wird, ergibt einen Abstand von $d = 335,2$ km.

Im nächsten Schritt ermitteln wir die Mondparallaxe π zwischen den beiden Beobachtungsorten, also den Winkel, um den die Mondposition zum Aufnahmezeitpunkt von Avigliano aus gegenüber Freiburg verschoben erschien, aus Bildern, die an beiden Orten aufgenommen wurden. Die Bilder müssen dabei folgende Kriterien erfüllen:

1. Der Mond darf nicht zu klein erscheinen, damit die Parallaxe gut messbar ist;

2. in der Mondumgebung müssen mindestens zwei Sterne zu sehen sein; besser sind mehrere Sterne, die den Mond umrahmen; aus 1.) und 2.) ergibt sich eine geeignete Aufnahmebrennweite in der Größenordnung von 1000 mm;

3. die Bilder müssen möglichst scharf und kurz belichtet sein (nachführen!);

4. die an den beiden Beobachtungsorten aufgenommenen Bilder müssen möglichst genau gleichzeitig entstanden sein. Da der Mond sich mit einer scheinbaren Winkelgeschwindigkeit von etwa $0.5''$ pro Zeitsekunde unter den Sternen bewegt, machen sich Zeitfehler im Sekundenbereich bereits unangenehm als Fehler bei π bemerkbar.

Zunächst bringen wir die Bilder in einem Bildverarbeitungsprogramm (Photoshop, The Gimp [2], ...) auf einen einheitlichen Maßstab und drehen eines der Bilder so, dass die Sterne deckungsgleich überlagert werden können (Abb. 2). Dazu empfiehlt es sich, mit Ebenen zu arbeiten und die obere Ebene halbtransparent zu halten. Die Positionen der Sterne sind der Regel gut bekannt und können einem Astrometriekatalog (z. B. dem HIPPARCOS-Katalog [3]) entnommen werden. Im konkreten Fall hatten die beiden Referenzsterne 56 und 59 Leonis zum Aufnahmezeitpunkt folgende scheinbare Positionen (incl. Eigenbewegung):

$$\begin{aligned} 56\,\mathrm{Leo} : \alpha &= 10^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}25.443^{\mathrm{s}} \;\; \delta = +06°08'41.91'' && (3) \\ 59\,\mathrm{Leo} : \alpha &= 11^{\mathrm{h}}01^{\mathrm{m}}08.735^{\mathrm{s}} \;\; \delta = +06°03'38.65'' && (4) \\ \mathrm{Abstand} &= 4236.16''. && (5) \end{aligned}$$

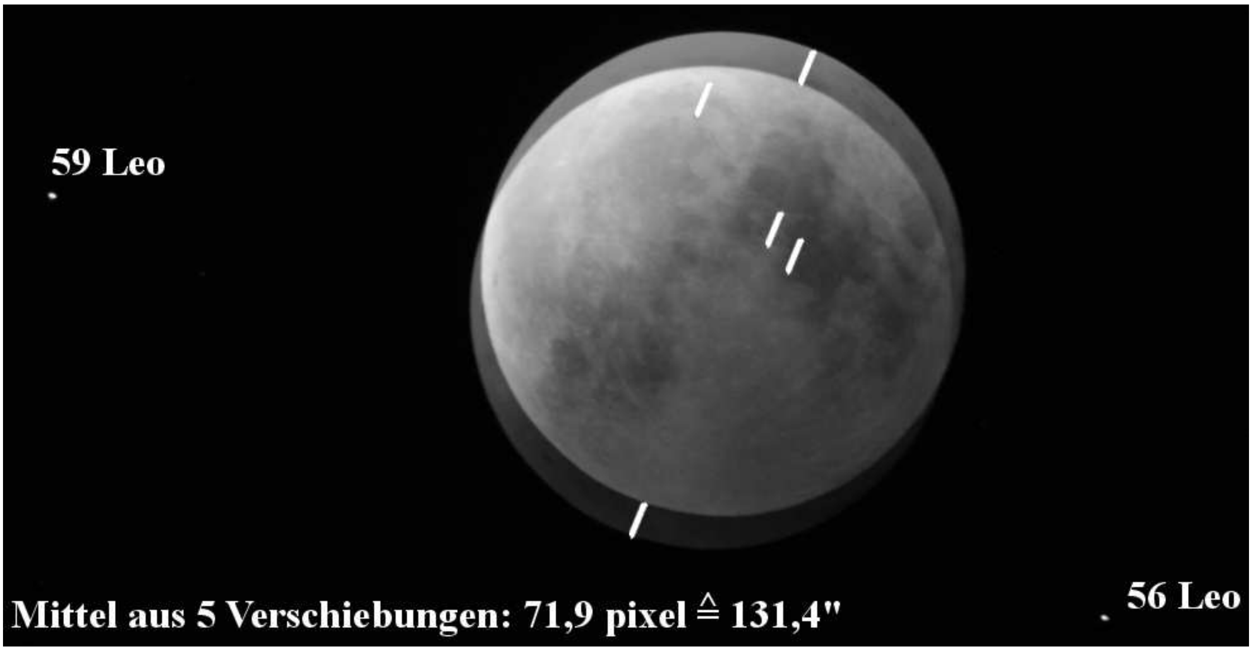

Abbildung 2: Kombination eines der von den beiden Beobachtungsorten aus gleichzeitig aufgenommenen Bildpaare. Wenn die Sterne zur Deckung gebracht werden, ist die Parallaxenverschiebung des Mondes unmittelbar sichtbar. Aus dem Winkelabstand der Sterne (5) ergibt sich der Bildmaßstab (6). Aus an einigen gut sichtbaren Mondformationen gemessenen individuellen Verschiebungen berechnet man die gemittelte Verschiebung für das Bildpaar.

Zusammen mit dem linearen Abstand der Sterne auf dem kombinierten Bild von 2318 Pixeln ergibt sich der Maßstab des Bildes zu:

$$1\,\mathrm{Pixel} \simeq 1.8275''. \tag{6}$$

Etwaige Abbildungsfehler der Fotoobjektive bleiben hier unberücksichtigt. Nun können die linearen Verschiebungen einiger gut sichtbarer Punkte auf dem Mond gemessen und mit (6) in einen Winkel umgerechnet werden. In guter Näherung bilden wir eine mittlere Verschiebung aus mehreren Einzelverschiebungen (z. B. Nord- und Südrand, Krater Plato, Menelaus, Dionysius):

$$\pi_{\text{gemittelt}} = 71.9 \text{ Pixel} \Rightarrow \pi_{\text{gemittelt}} = 131.4''. \tag{7}$$

Damit das Dreieck Freiburg–Avigliana/Turin–Mond ausreichend bestimmt ist, muss noch ein weiterer Winkel bekannt sein. Wir entscheiden uns für ϕ, den von Freiburg aus gesehenen Winkelabstand zwischen dem Mond und Avigliana/Turin. In diesem Winkel steckt im Wesentlichen die Höhe $h_{\text{Mond,Freiburg}}$ des Mondes über dem Freiburger Horizont, die im Prinzip mit einem Sextanten hätte gemessen werden können. Hier wurde $h_{\text{Mond,Freiburg}}$ mit einem Astronomieprogramm berechnet. Dazu kommt ein zusätzlicher Term, der berücksichtigt, dass Avigliana/Turin ja unter dem Freiburger Horizont liegt. In guter Näherung gilt:

$$\phi = h_{\text{Mond,Freiburg}} + \frac{\delta\psi}{2} = 48.13^\circ + 1.50^\circ = 49.63^\circ, \tag{8}$$

wobei $\delta\psi$ der Breitenunterschied zwischen den beiden Beobachtungsorten ist. Dann folgt für den dritten Winkel β:

$$\beta = 180^\circ - \phi - \pi = 130.3335^\circ. \tag{9}$$

Die Mondentfernung r von Freiburg lässt sich nun mit Hilfe des Sinussatzes berechnen:

$$\frac{d}{\sin\pi} = \frac{r}{\sin\beta} \qquad \Rightarrow \qquad r = d\ \frac{\sin\beta}{\sin\pi} = 4.01 \cdot 10^5 \text{ km}. \tag{10}$$

Die tatsächliche Entfernung des Mondes von Freiburg zum Aufnahmezeitpunkt betrug etwa 3.975$\cdot 10^5$ km (z. B. mit [4] zu berechnen), der absolute Entfernungsfehler liegt also bei rund 3700 km. Das entspricht einem relativen Fehler von knapp 1%. Dieses Ergebnis ist sehr befriedigend und liegt in der erwarteten Größenordnung, wenn man bedenkt, dass ein Fehler von $1''$ in der Hauptfehlerquelle π zu einem Fehler von 3000 km in der Entfernung r führt.

Diese Arbeit wäre nicht möglich gewesen ohne die schnelle und sehr freundliche Hilfe von Simone Bolzoni, dem ich an dieser Stelle noch einmal herzlich für seine Bilder und die gute Zusammenarbeit danken möchte.

Martin Federspiel

[1] Programm INVERSE http://www.ngs.noaa.gov/TOOLS/Inv_Fwd/Inv_Fwd.html
[2] Bildverarbeitungsprogramm The Gimp: http://www.gimp.org
[3] HIPPARCOS-Astrometriekatalog: http://vizier.u-strasbg.fr , Katalog I/239
[4] Interaktive HORIZONS-Ephemeride: http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi